Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas 2 (MA1112)
Intensivo 2024
Tercer Parcial
35 puntos

Nombre: ______________________________

N° Carnet: ______________________________

Justifique sus Respuestas

1. Calcule el siguiente límite: **(3 puntos)**
   a) $\lim_{x \to 1^-} (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

2. Desarrolle:
   a) Escriba la expresión racional:
   $$\frac{1}{x^2(x-2)^3(x^2+1)^2};$$
   como suma de fracciones parciales sin determinar las constantes asociadas. **(2 puntos)**

   b) Utilice el cambio universal $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$; para calcular: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\mathrm{sen}(x)}$ **(3 puntos)**

3. Calcule el valor de cada integral impropia o demuestre que es divergente:
   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}$ **(5 puntos)**

   b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,\mathrm{d}x$ **(5 puntos)**

   c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{x^3}\,\mathrm{d}x$ **(3 puntos)**

4. Dibuje la región limitada por las curvas: **(4 puntos)**
   $$f(x) = 1 - x$$
   y
   $$g(x) = |x^2 - 1|$$
   Exprese el área de dicha región mediante el uso de la integral (sin calcularla)

5. Considere el sólido que se genera al girar la región delimitada por $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $g(x) = \cos(x)$ y la recta $x = 0$, en el 1er cuadrante alrededor del eje $x = -1$.
   a) Exprese el volumen del sólido mediante el uso de arandelas **(4 puntos)**

   b) Exprese el volumen del sólido mediante cascarones cilíndricos **(4 puntos)**

   c) Calcule el volumen (use el método de su preferencia) **(2 puntos)**

SOLUCIONES

1. Calcule el siguiente límite:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \to 1^{\infty}$ **IND!**

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to 1^-} (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = e^{\ln\left(\lim\limits_{x\to 1^-} (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 1^-} \ln\left((2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right)}$$

Consideremos $\mathrm{L}_1 = \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \ln\left((2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\right) = \lim_{x\to 1^-} \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(2-x)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)} =$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{-1}{2-x}}{-\csc^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\cdot\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{2-x} = \frac{2}{\pi}$$

De acá,

$$\lim_{x\to 1^-} (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = e^{\mathrm{L}_1} = e^{2/\pi}$$

Solución 1.a

$$\lim_{x\to 1^-} (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = e^{2/\pi}$$

2. Desarrolle:

a) Escriba la expresión racional:

$$\frac{1}{x^2(x-2)^3(x^2+1)^2};$$

como suma de fracciones parciales sin determinar las constantes asociadas.

Tenemos un denominador con tres factores: un polinomio de grado 2 (x^2), un polinomio de grado 1 elevado al cubo ($(x-2)^3$), y un polinomio de grado dos elevado al cuadrado ($(x^2+1)^2$).

Solución 2.a

$$\frac{1}{x^2(x-2)^3(x^2+1)^2} = \frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{x^2} + \frac{\mathrm{C}}{(x-2)^3} + \frac{\mathrm{D}}{(x-2)^2} + \frac{\mathrm{E}}{x-2} + \frac{\mathrm{F}x+\mathrm{G}}{(x^2+1)^2} + \frac{\mathrm{H}x+\mathrm{I}}{x^2+1}$$

b) Utilice el cambio universal $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$; para calcular: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen}(x)}$

Si $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{2t}{t^2+1}$ y $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$, la integral nos queda:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen}(x)} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1}}{1-\frac{2t}{t^2+1}} = 2\int \frac{1}{\frac{t^2+1-2t}{\cancel{t^2+1}}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\cancel{t^2+1}} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t+1} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} =$$
$$= -\frac{2}{t-1} + C = -\frac{2}{\tan(x/2)-1} + C = \frac{2}{1-\tan(x/2)} + C =$$

Solución 2.b

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\operatorname{sen}(x)} = \frac{2}{1-\tan(x/2)} + C$$

3. Calcule el valor de cada integral impropia o demuestre que es divergente:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}$

Veamos que la integral tiene un límite de integración al infinito, y además, una discontinuidad en $x = 0$. Asumamos que la integral converge, de manera que, en caso contrario, llegaremos a un absurdo, así:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)} = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)} + \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)}$$

Resolvamos primero la integral indefinida, empezando con un cambio de variable:

$x = u^2$, $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)} = \int \frac{2\cancel{u}\,\mathrm{d}u}{\cancel{u}(u^2+1)} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = 2\arctan(u) + C = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$$

Por lo tanto,

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)} + \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)} = \lim_{a\to 0^+} 2\arctan(\sqrt{x})\Big|_a^1 + \lim_{b\to\infty} 2\arctan(\sqrt{x})\Big|_1^b =$$
$$= \lim_{a\to 0^+}\left(2\arctan(\sqrt{1}) - 2\arctan(\sqrt{a})\right) + \lim_{b\to\infty}\left(2\arctan(\sqrt{b}) - 2\arctan(\sqrt{1})\right) =$$
$$= 2\arctan(1) - 2\arctan(0) + 2\arctan(\infty) - 2\arctan(1) = \pi$$

Solución 3.a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+1)} = \pi$$

b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{3x^2-1}{x^2(x^2-1)}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{3x^2-1}{x^2(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$

Veamos que la integral tiene un límite de integración al infinito, y no posee discontinuidades dentro del intervalo de integración. Asumamos que la integral converge, de manera que, en caso contrario, llegaremos a un absurdo, así:

$$\int_2^{+\infty} \frac{3x^2-1}{x^2(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{3x^2-1}{x^2(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Apliquemos el método de fracciones simples:

$$\frac{3x^2-1}{x^2(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax+B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x+1)(x-1)+Cx^2(x-1)+Dx^2(x+1)}{x^2(x+1)(x-1)} =$$
$$= \frac{(Ax+B)(x^2-1)+Cx^3-Cx^2+Dx^3+Dx^2}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{Ax^3-Ax+Bx^2-B+Cx^3-Cx^2+Dx^3+Dx^2}{x^2(x-1)(x+1)} =$$
$$= \frac{(A+C+D)x^3+(B-C+D)x^2-Ax-B}{x^2(x-1)(x+1)}$$

Así, igualando los denominadores, nos queda lo siguiente:

$3x^2-1 = (A+C+D)x^3+(B-C+D)x^2-Ax-B$

De donde obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B-C+D=3 \\ -A=0 \\ -B=-1 \end{cases} \Rightarrow A=0,\ B=1,\ C=-1,\ D=1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{3x^2-1}{x^2(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}-\ln(x+1)+\ln(x-1)\right|_2^b =$$
$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}-\ln(b+1)+\ln(b-1)+\frac{1}{2}+\ln(3)-\ln(1)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}+\ln(3)+\lim_{b\to\infty}\left[\ln(b-1)-\ln(b+1)\right]-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b} = \frac{1}{2}+\ln(3)+\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{b-1}{b+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}+\ln(3)+\ln\left(\lim_{b\to\infty}\frac{b-1}{b+1}\right) = \frac{1}{2}+\ln(3)+\ln(1) = \frac{1}{2}+\ln(3)$$

Solución 3.b

$$\int_2^{+\infty} \frac{3x^2-1}{x^4-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+\ln(3)$$

c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{x^3}\,\mathrm{d}x$

Para $x \geq 1$:

$$x^3 \geq x > 0 \Rightarrow e^{x^3} \geq e^x \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{x^3}\,\mathrm{d}x \geq \int_1^{+\infty} e^x\,\mathrm{d}x$$

Con esto, podemos determinar la convergencia o divergencia de la integral por medio del criterio de comparación. Evaluemos la convergencia de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^x\,\mathrm{d}x$, considerando el siguiente límite:

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} e^x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(e^b - e^1\right) = \infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^x\,\mathrm{d}x \textbf{ Diverge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{x^3}\,\mathrm{d}x \textbf{ Diverge}$$

Solución 3.c

$$\int_1^{+\infty} e^{x^3}\,\mathrm{d}x \to \textbf{Diverge}$$

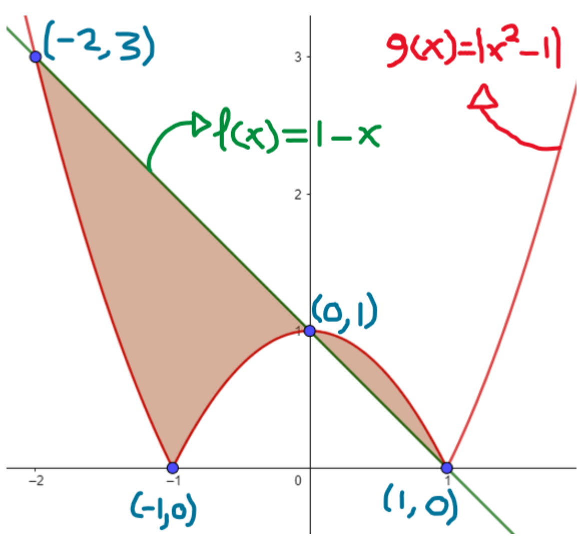
4. Dibuje la región limitada por las curvas:

$$f(x) = 1 - x$$

y

$$g(x) = |x^2 - 1|$$

Exprese el área de dicha región mediante el uso de la integral (sin calcularla)



De acá, para poder obtener el área total de la región, debemos dividir la misma en 3:

$$R = \int_{-2}^{-1} (1 - x - (x^2 - 1))\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} (1 - x - (1 - x^2))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (1 - x^2 - (1 - x))\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-2}^{-1} (2 - x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x - x^2)\,\mathrm{d}x$$

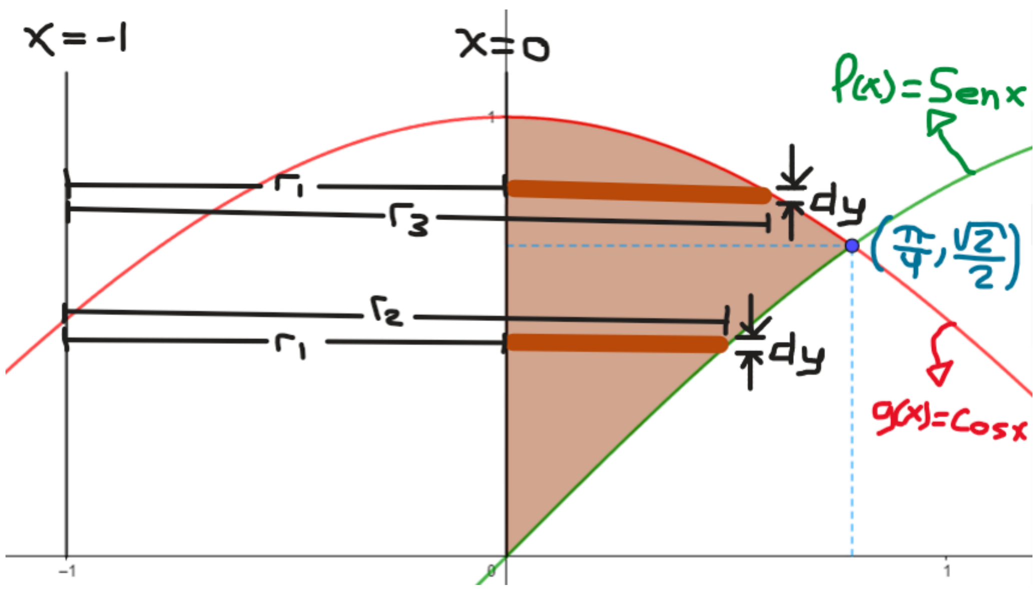
Solución 4

$$R = \int_{-2}^{-1} (2 - x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x - x^2)\,\mathrm{d}x$$

5. Considere el sólido que se genera al girar la región delimitada por $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $g(x) = \cos(x)$ y la recta $x = 0$, en el 1er cuadrante alrededor del eje $x = -1$.

a) Exprese el volumen del sólido mediante el uso de arandelas

De manera gráfica tenemos lo siguiente:



Las líneas resaltadas en la imagen son las secciones transversales (Vistas en 2D) de dos arandelas con variación en el eje y. La región se puede dividir en dos regiones distintas debido a que varían con las funciones, por lo tanto, el volumen nos quedaría como dos integrales.

$y = \mathrm{sen}(x) \Rightarrow x = \mathrm{arc\,sen}(y)$
$y = \cos(x) \Rightarrow x = \arccos(y)$
$r_1 = 1$
$r_2 = \mathrm{arc\,sen}(y) + 1$
$r_3 = \arccos(y) + 1$

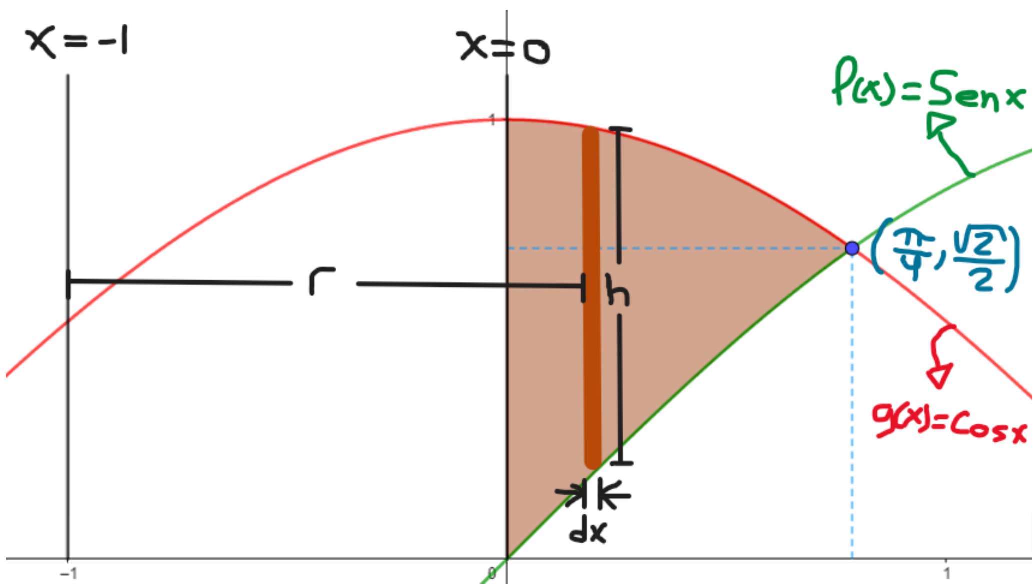
Por el método de las arandelas, sabemos que el volumen será expresado de la siguiente manera:

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} (r_2^2 - r_1^2)\,\mathrm{d}y + \pi \int_{\sqrt{2}/2}^{1} (r_3^2 - r_1^2)\,\mathrm{d}y =$$
$$= \pi \left[\int_0^{\sqrt{2}/2} ((\operatorname{arc\,sen}(y) + 1)^2 - 1)\,\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} ((\arccos(y) + 1)^2 - 1)\,\mathrm{d}y \right] =$$
$$= \pi \left[\int_0^{\sqrt{2}/2} (\operatorname{arc\,sen}^2(y) + 2\operatorname{arc\,sen}(y))\,\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} (\arccos^2(y) + 2\arccos(y))\,\mathrm{d}y \right]$$

Solución 5.a

$$V = \pi \left[\int_0^{\sqrt{2}/2} (\operatorname{arc\,sen}^2(y) + 2\operatorname{arc\,sen}(y))\,\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} (\arccos^2(y) + 2\arccos(y))\,\mathrm{d}y \right]$$

b) Exprese el volumen del sólido mediante cascarones cilíndricos



La línea resaltada en la imagen es la sección transversal (Vista en 2D) de un cilindro con variación en el eje x. La región se encuentra entre las funciones $g(x)$ y $f(x)$, por lo tanto, el volumen nos quedaría como una integral.

$r = x + 1$
$h = \cos x - \operatorname{sen} x$

Por el método de cascarones cilíndricos, sabemos que el volumen será expresado de la siguiente manera:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} rh\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\pi/4} (x+1)(\cos x - \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$$

Solución 5.b

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} (x+1)(\cos x - \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x$$

c) Calcule el volumen (use el método de su preferencia)

Usemos el resultado obtenido en el inciso (5.b) para calcular el volumen:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} (x+1)(\cos x - \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\pi/4} \left(x(\cos x - \operatorname{sen} x) + \cos x - \operatorname{sen} x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \left[\underbrace{\int_0^{\pi/4} x(\cos x - \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x}_{I} + \int_0^{\pi/4} \cos x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \right]$$

Aplicamos integración por partes para I:

$$\begin{array}{c} f(x) = x \\ g'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} f'(x) = 1 \\ g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \end{array}$$

$$\Rightarrow I = x(\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (\operatorname{sen} x + \cos x)\,\mathrm{d}x$$

Volviendo a la integral original,

$$V = 2\pi \left[x(\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x - \cancel{\int_0^{\pi/4} \cos x\,\mathrm{d}x} + \cancel{\int_0^{\pi/4} \cos x\,\mathrm{d}x} - \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \right] =$$

$$2\pi \left[x(\operatorname{sen} x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} - 2\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x \right] = 2\pi\big(x(\operatorname{sen} x + \cos x) + 2\cos x\big)\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - (0(\operatorname{sen} 0 + \cos 0) + 2\cos 0)\right] = 2\pi \left[\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2\right] =$$

$$= \pi \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} - 4 \right)$$

Solución 5.c

$$V = \pi \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} - 4 \right)$$

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Daniel Quijada** para **GECOUSB**

Daniel Quijada
20-10518
Lic. en Matemáticas

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **20-10518@usb.ve**